# 境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法 (数値解析における理論・手法・応用)


畔上, 秀幸

数理解析研究所講究録
第 1638 巻 2009 年 1-17



# 境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法
# A regularization solution of shape and topology optimization problems for domains of boundary value problems

畔上 秀幸 *
AZEGAMI, Hideyuki †

**概要**

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域を設計対象にした形状最適化問題と偏微分方程式の係数を密度のべき乗で重み付けした SIMP 型位相最適化問題の正則な数値解法を示す．最初に，抽象的変分問題を考え，抽象的勾配法を定義する．抽象的勾配法では，ある Hilbert 空間上で強圧的なある双 1 次形式を用意する必要がある．形状最適化問題は Lipschitz 連続な境界をもつ有界な領域の集合を許容集合として定式化する．Lipschitz 連続な領域変動を仮定して，勾配の評価式を得る．その勾配は本来必要な滑らかさを有していないことを示す．適切な $H^1$ 空間を選択した勾配法を Galerkin 法で解く方法は正則である．SIMP 型位相最適化問題についても同様の方法が考えられる．著者らが力法とよんできた方法や SIMP 型位相最適化問題の $H^1$ 勾配法とよんできた方法は，いずれも，抽象的勾配法において適切な $H^1$ 空間を選択した $H^1$ 勾配法の族にまとめられる．

**キーワード**: 偏微分方程式, 境界値問題, 形状最適化問題, 位相最適化問題, 形状微分, 密度微分, $H^1$ 勾配法

**Keywords**: Partial differential equation, Boundary value problem, Shape optimization problem, Topology optimization problem, Shape derivative, Density derivative, $H^1$ gradient method

## 1 はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域を設計対象にして，境界を変動させることである汎関数が最小となる境界形状を求める問題を形状最適化問題とよぶことにする．一方，領域に多数の孔が開くことを仮定して，それらの有無と形状を変えることで汎関数

*名古屋大学 情報科学研究科
†Graduate School of Information Science, Nagoya University

が最小となる孔配置を求める問題を位相最適化問題とよぶことにする．位相最適化問題に関しては，領域内の点の集合に対する特性関数を許容集合にした位相最適化問題は，許容集合が点列コンパクトではないことから不正則となる．そこで，中間値が取れる密度関数の集合を設計変数に設定して，最適な密度分布を求める問題をその近似問題とみなして，その解から領域の孔配置を決定する方策を取るときも，その近似問題を位相最適化問題とよばれてきた．

本稿では，それぞれの問題において領域変動あるいは密度変動に対する汎関数の勾配を求め，それを用いた勾配法による数値解法について，これまで検討してきた結果を紹介する．

ここで紹介する形状最適化問題の解法は，1994年に著者が直観に頼って，力法 (ちからほう, traction method) と呼んで提案した方法である [1]．その後，数学としての位置づけは海津によって示された [2]．

一方，位相最適化問題に関しては，1980年代後半から問題の構成や計算法について盛んに研究が行われてきた [3, 4]．その中で，偏微分方程式の係数を密度のべき乗で重み付けした SIMP (solid isotropic material with penalization) 型問題について，著者らは，力法と同様のアプローチで，ある解法を $H^1$ 勾配法と呼んで提案した [5, 6]．

いずれの問題においても，領域や密度の変動に対する汎関数の勾配は，本来，設計変数が必要とする正則性を満たさないことが示せる．したがって，ある汎関数を最小化するような設計変数の変動を求める場面で，汎関数の勾配の負値を，直接，設計変数に用いるようなアルゴリズムでは，数値不安定現象に遭遇することになる．この現象が現れた場合には，これまで，様々な対策が用いられてきたという経緯があった．

本稿では，最初に，抽象的変分問題を考えて，抽象的勾配法を定義する．抽象的勾配法では，ある Hilbert 空間を選ぶことが必要となる．その上で，過去に提案してきた数値解法は，いずれも，解こうとする問題に適した $H^1$ 空間を選択した，$H^1$ 勾配法と呼べる族にまとめられることを示したい．

# 2 抽象的勾配法

次の問題を考えよう．

**問題 2.1 (抽象的変分問題)** 実 Banach 空間 $V$，空でない凸有界閉部分集合 $S \subset V$ とする．汎関数 $J : S \to \mathbf{R}$ を既知として，次の $x^\star \in S$ を求めよ．

$$J(x^\star) = \min_{x \in S} J(x)$$

この抽象的変分問題の解の存在について，次の結果を得る [7]．

**定理 2.1 (最小解の存在)** 問題 2.1 において，$S$ が弱点列コンパクトで，$J$ が $S$ 上で下半連続ならば，問題 2.1 は最小点 $x^\star \in S$ をもつ．

弱点列コンパクトと下半連続の定義を付録の定義 A.1, A.2 に示す．弱点列コンパクトに関する定理を付録の定理 A.1 に示す．

$S$ が弱点列コンパクトであれば，ある $x^k \in S$ から，次に示す抽象的最適変動問題の解 $h^\star \in V$ と適切な $\epsilon > 0$ を使って，次式で点列 $\left\{x^k\right\}_k$ を構成していけば，問題 2.1 の極小解に到達できる．

$$x^\epsilon = x^k + \epsilon h \in V$$
$$x^{k+1} = P_S\left(x^\epsilon\right) \in S$$

ただし，$P_S$ は凸有界閉集合 $S$ への直交射影作用素である．

**問題 2.2 (抽象的最適変動問題)** 実 Banach 空間 $V$，空でない凸有界閉部分集合 $S \subset V$，汎関数 $J: S \to \mathbf{R}$ とする．ある $x \in S$ と小さな $\epsilon > 0$ に対して，次式を満たす $h^\star \in V$ を求めよ．

$$J\left(x + \epsilon h^\star\right) = \min_{h \in V,\ \|h\|=1} J\left(x + \epsilon h\right)$$

ある $x \in S$ における勾配を次のように定義する．

**定義 2.1 (勾配)** 実 Banach 空間 $V$，空でない凸有界閉部分集合 $S \subset V$，汎関数 $J: S \to \mathbf{R}$ とする．ある $x \in S$ に対して，次式が成り立つと仮定する．

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|J(x+h) - J(x) - J'(x)(h)|}{\|h\|} = 0 \quad \forall h \in V$$

ここで，$J'(x)(h)$ が $h \in V$ に対する有界線形汎関数となるとき，$J'(x)(h)$ を Fréchet 微分という．また，$J'(x)(h) = \langle G(x), h\rangle, G(x) \in V^*$ とかき，$V^*$ を $V$ の双対空間，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を双対積，$G(x)$ を $x \in V$ における勾配とよぶ．

勾配 $G$ が得られたとする．$G$ を用いて，次の問題の解 $h_G$ を求め，抽象的最適変動問題の解の候補とするスキームを抽象的勾配法という．

**問題 2.3 (抽象的勾配法)** $G(x) \in V^*$ を $J(x)$ の勾配とする．また，ある Hilbert 空間 $X \supset V$ 上のある強圧的な双一次形式を $b: X \times X \mapsto \mathbf{R}$ とする．

$$\exists \alpha > 0: \ b(x, x) \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in X$$

ある $x \in V \subset X$ において $G(x) \in X^*, G(x) \neq 0$ のとき，次式を満たす $h_G \in X$ を求めよ．

$$b\left(h_G, y\right) = -\langle G(x), y\rangle \quad \forall y \in X$$

抽象的勾配法の解 $h_G$ について，Lax-Milgram の定理により次の定理が成り立つ．

**定理 2.2 (抽象的勾配法)** 問題 2.1 において，ある $x \in V$ のときの $J(x)$ の勾配 $G \in V^*$ が存在し，$G(x) \in X^* \subset V^*, G(x) \neq 0$ のとき，問題 2.3 の解 $h_G \in X$ は一意に存在する．

問題 2.3 の解 $h_G \in X$ について，十分小さな $\epsilon > 0$ に対して次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} J\left(x + \epsilon h_G\right) - J(x) &= \epsilon \langle G(x), h_G\rangle + o(\epsilon \|h_G\|) \leq -\epsilon b\left\langle h_G, h_G\right\rangle + o(\epsilon \|h_G\|) \\ &\leq -\epsilon \alpha \|h_G\|^2 < 0 \end{aligned}$$

**注意 2.1 (抽象的勾配法)** 抽象的勾配法の解 $h_G \in V$ のとき，抽象的最適変動問題の解 $h^\star = h_G$ である．$h_G \notin V$ のとき，Galerkin 法などの数値解析スキームを適切に選択することにより，$h_G$ を $V$ に制約して，$h^\star$ の近似解を求めることは可能である．

## 3 形状最適化問題

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域を設計対象にして，境界を変動させる形状最適化問題を考えよう．

領域の許容集合を次のように定義する．

**定義 3.1 (領域の許容集合)** 領域 $D \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ は区分的に滑らかで Lipschitz 連続な ($W^{1,\infty}$ 級の) 境界を持つ凸開領域とする．ある $D$ に対して領域の許容集合 $\mathcal{W}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{W} = \left\{ \Omega \subset \mathbf{R}^d \middle| \; \Omega \subsetneq D,\ \Omega\text{: connected and open}, \right.$$
$$\left. \partial\Omega = \Gamma\text{: Lipschitz coutinuous and partially smooth} \right\}$$

$\mathcal{W}$ は $\Omega$ の特性関数 $\chi_\Omega \in L^2(D; \mathbf{R})$ との対応により，実 Banach 空間 $L^2(D; \mathbf{R})$ の位相で凸有界閉部分集合の性質をもつ [8].

$$\chi_\Omega(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in \Omega) \\ 0 & (\boldsymbol{x} \in D \setminus \Omega) \end{cases} \tag{3.1}$$

本稿では，次の境界値問題を考える．

**問題 3.1 (境界値問題 BV(Ω))** 定義 3.1 の $\mathcal{W}$ とする．$f \in L^2(D; \mathbf{R})$ を既知とする．ある $\Omega \in \mathcal{W}$ に対して，次式を満たす $u : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を求めよ．

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

本稿では，次の評価汎関数を考える．

**定義 3.2 (評価汎関数)** 定義 3.1 の $\mathcal{W}$ とする．$\Omega \in \mathcal{W}$ で定義された問題 $\mathbf{BV}(\Omega)$ の解を $u$ とする．$u$ の関数 $g^{(l)} \in W^{2,\infty}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, m)$ とする．目的汎関数 $J^{(0)}(\Omega, u)$, 制約汎関数 $\boldsymbol{J}(\Omega, u) = \left\{ J^{(l)}(\Omega, u) \right\}_l \in \mathbf{R}^m$ を合わせて $\left( J^{(0)}(\Omega, u), \boldsymbol{J}(\Omega, u) \right) \in \mathbf{R}^{m+1}$ を評価汎関数とよび，次のように定義する．

$$J^{(l)}(\Omega, u) = \int_\Omega g^{(l)}(u)\, \mathrm{d}x$$

形状最適化問題を次のように定義する．

**問題 3.2 (形状最適化問題 SO)** 定義 3.1, 3.2 の $\mathcal{W}$, $\left( J^{(0)}(\Omega, u), \boldsymbol{J}(\Omega, u) \right)$ とする．$\Omega \in \mathcal{W}$ で定義された問題 $\mathbf{BV}(\Omega)$ の解を $u$ とする．このとき，次のような $\Omega^\star \in \mathcal{W}$ を求めよ．

$$J^{(0)}(\Omega^\star, u^\star) = \min_{\Omega \in \mathcal{W}} \left\{ J^{(0)}(\Omega, u)) \middle| \; \boldsymbol{J}(\Omega, u) \le \mathbf{0} \right\}$$

領域の許容集合 $\mathcal{W}$ は点列コンパクトである．したがって，次のようなスキームで領域列 $\left\{ \Omega^k \right\}_k$ を構成していけば，局所解に到達できる．

ある $\Omega^k \in \mathcal{W}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ からの領域変動を次のように定義する．

**定義 3.3 (領域変動)** 定義 3.1 の $D$, $\mathcal{W}$ とする．ある $\Omega = \Omega^k \in \mathcal{W}$ に対して，領域変動 $\boldsymbol{\rho}:\ \Omega \to \mathbf{R}^d$ の集合 $\mathcal{U}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{U} = W^{1,\infty}\left(\Omega; \mathbf{R}^d\right)$$

新領域 $\Omega^{k+1}$ は $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ と小さな $\epsilon > 0$ を用いて次式で構成する．

$$\Omega^{\epsilon\rho} = \{\boldsymbol{x}^{\epsilon\rho} \mid \boldsymbol{x}^{\epsilon\rho} = \boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{\rho}\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}\}$$
$$\Omega^{k+1} = \left\{\boldsymbol{x}^{k+1} \,\middle|\, \boldsymbol{x}^{k+1} = P_D(\boldsymbol{x}^{\epsilon\rho})\ \forall \boldsymbol{x}^{\epsilon\rho} \in \Omega^{\epsilon\rho}\right\}$$

ただし，$P_D$ は凸有界領域 $D$ への直交射影作用素である．

ある $\Omega \in \mathcal{W}$ からの最適な領域変動を求める問題を次のように定義する．

**問題 3.3 (最適領域変動問題 DV(Ω))** 定義 3.1, 3.2, 3.3 の $\mathcal{W}$, $\left(J^{(0)}(\Omega, u), \boldsymbol{J}(\Omega, u)\right)$, $\mathcal{U}$ とする．ある $\Omega \in \mathcal{W}$ と十分小さな $\epsilon > 0$ を既知とする．$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ に対する問題 **BV**$(\Omega^{\epsilon\rho})$ の解を $u^{\epsilon\rho}$ とする．このとき，次のような $\boldsymbol{\rho}^\star \in \mathcal{U}$ を求めよ．

$$J^{(0)}\left(\Omega^{\epsilon\rho^\star}, u^{\epsilon\rho^\star}\right) = \min_{\rho\in\mathcal{U},\ \|\rho\|=1} \left\{J^{(0)}(\Omega^{\epsilon\rho}, u^{\epsilon\rho}) \,\middle|\, \boldsymbol{J}(\Omega^{\epsilon\rho}, u^{\epsilon\rho}) \le \boldsymbol{0}\right\}$$

問題 **DV**(Ω) の解 $\boldsymbol{\rho}^\star \in \mathcal{U}$ と適切な $\epsilon > 0$ を使って，定義 3.3 に従い，$\Omega = \Omega^k$ を $\Omega^{k+1}$ に更新する．$\epsilon$ の決定方法は 3.3.3 に示す．
以下に，問題 **DV**(Ω) の解法と，その解を用いた問題 **SO** の解法を示す．

## 3.1 $J^{(l)}$ の形状勾配

問題 **DV**(Ω) における $J^{(l)}(\Omega, u)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, m)$ の領域変動に対する勾配を形状勾配とよぶ．ここでは，$J^{(l)}(\Omega, u)$ ごとの形状勾配の具体的な計算式を示す．
境界値問題の解 $u$ の形状微分を次のように定義する．

**定義 3.4 ($u$ の形状微分 $u'$)** 定義 3.3 のある領域変動 $\epsilon\boldsymbol{\rho}$ とする．問題 **BV**(Ω), **BV**$(\Omega^{\epsilon\rho})$ の解を $u$, $u^{\epsilon\rho}$ とする．すべての $\boldsymbol{\rho}$ に対して次式で定義する $u$ の Gâteaux 微分 $u'$ を形状微分とよぶ．

$$u' = \lim_{\epsilon\to+0} \frac{u^{\epsilon\rho} - u}{\epsilon}$$

$u'$ について，次の結果を得る．

**補題 3.1 ($u$ の形状微分 $u'$)** 定義 3.1, 3.3 の $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ とする．ある $\Omega \in \mathcal{W}$ のときの問題 **BV**(Ω) の解を $u$ とする．このとき，$\rho \in \mathcal{U}$ に対する $u$ の形状微分 $u'$ は，次の問題の一意解である．

$$-\Delta u' = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u' = -(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nu}) \quad \text{on } \Gamma$$

ただし，$\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{R}^d$ は外向き単位法線である．

補題 3.1 の境界値問題より，$u'$ は $\boldsymbol{\rho}$ に対する連続線形汎関数であることが確認できる．

定理 3.1 のために， $J^{(l)}(\Omega, u)$ に対する随伴問題を定義する．

**問題 3.4 ($J^{(l)}(\Omega, u)$ に対する随伴問題 $\mathbf{AD}^{(l)}(\Omega)$)** 定義 3.2 の $J^{(l)}(\Omega, u)$ とする．$\mathrm{d}g^{(l)}/\mathrm{d}u = g_u^{(l)}$ を既知とする．このとき，次式を満たす $v^{(l)}: \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
-\Delta v^{(l)} &= g_u^{(l)} \quad \text{in } \Omega, \\
v^{(l)} &= 0 \quad \text{on } \Gamma
\end{aligned}
$$

問題 $\mathbf{AD}^{(l)}(\Omega)$ の解 $v^{(l)}$ は一意に存在する．

$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ に対する $J^{(l)}(\Omega, u)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, m)$ の Fréchet 微分 $J^{(l)\prime}(\Omega, u)(\boldsymbol{\rho})$ を形状微分とよぶ．また，$J^{(l)\prime}(\Omega, u)(\boldsymbol{\rho}) = \left\langle \boldsymbol{G}^{(l)}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle$ とおいて，$\boldsymbol{G}^{(l)} \in \mathcal{U}^*$ を形状勾配とよぶ．$J^{(l)\prime}(\Omega, u)(\boldsymbol{\rho})$ と $\boldsymbol{G}^{(l)}$ について次の結果を得る．

**定理 3.1 ($J^{(l)}$ の形状微分)** 問題 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の定義を用いる．ある $\Omega \in \mathcal{W}$ のときの問題 $\mathbf{BV}(\Omega)$ と $\mathbf{AD}^{(l)}(\Omega)$ の解を $u, v^{(l)}$ とする．$\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}$ に対する $J^{(l)}(\Omega, u)$ の形状微分 $J^{(l)\prime}(\Omega, u)(\boldsymbol{\rho})$ について次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
J^{(l)\prime}(\Omega, u)(\boldsymbol{\rho}) &= \int_\Gamma G^{(l)}\left(u, v^{(l)}\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\Gamma = \left\langle G^{(l)}\left(u, v^{(l)}\right) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \right\rangle \\
G^{(l)}\left(u, v^{(l)}\right) &= g^{(l)}(u) + (\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nu})\left(\boldsymbol{\nabla} v^{(l)} \cdot \boldsymbol{\nu}\right)
\end{aligned}
$$

また，$f \in L^2(\Omega, u)$, $g^{(l)} \in W^{2,\infty}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ より，形状勾配 $G^{(l)}\left(u, v^{(l)}\right) \in L^1(\Gamma; \mathbf{R})$ が成り立つ．

**証明** 付録 B の補題 B.1 より，次式が成り立つ．

$$
J'(\Omega, u)) = \int_\Omega g_u^{(l)}(u) u' \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma g^{(l)}(u) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\Gamma
$$

$u, v^{(l)}$ は補題 3.1 と問題 $\mathbf{AD}^{(l)}(\Omega)$ の解である．この関係を用いて，上式の右辺第 1 項を書き換えれば，定理の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega g_u^{(l)}(u) u' \, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \Delta v^{(l)} u' \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Gamma \boldsymbol{\nabla} v^{(l)} \cdot \boldsymbol{\nu} u' \, \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} v^{(l)} \cdot \boldsymbol{\nabla} u' \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nu})\left(\boldsymbol{\nabla} v^{(l)} \cdot \boldsymbol{\nu}\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega v^{(l)} \Delta u' \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Gamma (\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nu})\left(\boldsymbol{\nabla} v^{(l)} \cdot \boldsymbol{\nu}\right) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned}
$$

また，$f \in L^2(D; \mathbf{R})$, $g^{(l)} \in W^{2,\infty}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ より，$u, v^{(l)} \in H^2(\Omega; \mathbf{R})$ を得る．この結果とトレースの結果により $G^{(l)}\left(u, v^{(l)}\right) \in L^1(\Gamma; \mathbf{R})$ を得る．□

Lagrange 汎関数の停留条件を用いた別の証明を付録 C に示す．定理 3.1 より，形状勾配 $G^{(l)}\left(u, v^{(l)}\right) \boldsymbol{\nu}: \Gamma \to \mathbf{R}^d$ は $\Gamma$ 上の関数として得られた．

**注意 3.1 ($J^{(l)}$ の形状微分)** $G^{(l)}\boldsymbol{\nu} \notin W^{1,\infty}\left(\Gamma; \mathbf{R}^d\right)$ より，$G^{(l)}\boldsymbol{\nu}$ を $\boldsymbol{\rho}$ の境界上へのトレースに置き換えることはできない．適切な正則化法を考える必要がある．

$G^{(l)}\boldsymbol{\nu} \in L^1\left(\Gamma; \mathbf{R}^d\right) \subset W^{1,\infty}\left(\Gamma; \mathbf{R}^d\right)^*$ より，$J^{(l)}$ は $\mathcal{U}$ 上で連続である．したがって，定理 2.1 により，次の結果を得る．

**定理 3.2 (問題 DV(Ω) の解の存在)** 問題 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の解 $\boldsymbol{\rho}^\star$ は存在する．

## 3.2 $H^1$ 勾配法

形状勾配 $G^{(l)}\boldsymbol{\nu}$ が求められたとする．$G^{(l)}\boldsymbol{\nu}$ を用いて $J^{(l)}$ を最小化する方向 $\boldsymbol{\rho}^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ を求めることを考える．

抽象的勾配法の問題 2.3 において，$V = \mathcal{U}, X = H^1\left(\Omega; \mathbf{R}^d\right)$ を選ぶ．このとき，次の問題が定義できる．

**問題 3.5 ($H^1$ 勾配法 $\mathbf{HG}^{(l)}(\Omega)$)** 定理 3.1 の $G^{(l)}\boldsymbol{\nu}:\ \Gamma \to \mathbf{R}^d$ を既知とする．次式を満たす $\boldsymbol{\rho}_G^{(l)} \in X = H^1\left(\Omega; \mathbf{R}^d\right)$ を求めよ．

$$a\left(\boldsymbol{\rho}_G^{(l)}, \boldsymbol{v}\right) = -\left\langle G^{(l)}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v}\right\rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in X$$

ただし，$a(\cdot,\cdot)$ は $X$ 上の強圧的な双 1 次形式である．例えば次式とする．$c_0, c_1$ は同時には零ではない非負定数とする．

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) + c_1 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}x + \int_\Gamma c_0\, (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu})\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu})\, \mathrm{d}\Gamma$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \left(\varepsilon_{ij}\right)_{ij} = \left(\frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right)_{ij}$$

この問題の解 $\boldsymbol{\rho}_G^{(l)}$ を $J^{(l)}(\boldsymbol{u})$ が最小化する方向 $\boldsymbol{\rho}^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ の候補とする方法を $H^1$ 勾配法とよぶ．この $H^1$ 勾配法について，次の定理を得る [2]．

**定理 3.3 (DV(Ω) に対する $H^1$ 勾配法)** 問題 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の定義を用いる．ある $\Omega \in \mathcal{W}$ に対して，$X = H^1\left(\Omega; \mathbf{R}^d\right)$ とする．このとき，定理 3.1 の $G^{(l)}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{(l)}\right)\boldsymbol{\nu}$ が $X^*$ に属し，問題 $\mathbf{HG}^{(l)}(\Omega)$ の解 $\boldsymbol{\rho}_G^{(l)} \in X$ は一意に存在する．さらに，

(1) $\boldsymbol{\rho}_G^{(l)} \in \mathcal{U}$ のとき，$J^{(l)}(\boldsymbol{u})$ を最小化する方向 $\boldsymbol{\rho}^{(l)\star} = \boldsymbol{\rho}_G^{(l)}$ である．

(2) $\boldsymbol{\rho}_G^{(l)} \notin \mathcal{U}$ のとき，$n \to \infty$ に対して $\boldsymbol{\rho}_n^{(l)\star} \to \boldsymbol{\rho}_G^{(l)} \in X$ となる $J^{(l)}(\boldsymbol{u})$ を最小化する方向の列 $\left\{\boldsymbol{\rho}_n^{(l)\star}\right\}_n \in \mathcal{U}$ が存在する．

**注意 3.2 ($H^1$ 勾配法)** $\mathcal{U}$ に属する有限個の関数を基底関数に用いた有限次元空間 $\mathcal{U}_h$ を用いて，問題 $\mathbf{HG}^{(l)}(\Omega)$ を Galerkin 法で解く場合は，近似解 $\boldsymbol{\rho}_{Gh}^{(l)\star} \in \mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ となる．

## 3.3 数値解法

評価汎関数 $J^{(l)}(u)$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ ごとに，それらを最小化する方向 $\boldsymbol{\rho}^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ が $H^1$ 勾配法により求められたとする．最後に，最適領域変動問題 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の解 $\Omega^{\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star}$ を求める方法と，その領域変動を繰り返しながら，形状最適化問題 **SO** を解く全体のスキームを考えよう．

### 3.3.1 最適領域変動問題の解法

多制約問題 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の解 $\boldsymbol{\rho}^\star$ を求める方法について考える．

逐次 2 次計画 (sequential quadratic programming) 法に基づく次の問題を考える．

**問題 3.6 (逐次 2 次計画問題 SQP(Ω))** 問題 $\mathbf{DV}(\Omega)$ の $\left(J^{(0)}(\Omega, u), \boldsymbol{J}(\Omega, u)\right)$ に対して，定理 3.1 の形状勾配 $\left(G^{(0)}, \boldsymbol{G}\right)$ を既知する．問題 3.5 で定義された $X$ 上の強圧的な双 1 次形式 $a(\cdot, \cdot)$ とする．ある小さな $\epsilon > 0$ に対して，次式を満たす $\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star \in \mathcal{U}$ を求めよ．

$$Q(\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star) = \min_{\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U},\ \|\boldsymbol{\rho}\|=1} \left\{ Q(\epsilon\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\epsilon} a(\epsilon\boldsymbol{\rho}, \epsilon\boldsymbol{\rho}) + \left\langle G^{(0)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho} \right\rangle \,\middle|\, \boldsymbol{J}(\Omega, u) + \langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho} \rangle \le \mathbf{0} \right\}$$

この問題に対する最適性の必要条件について，次の結果を得る [7, 9].

**定理 3.4 (KKT 条件)** 問題 3.6 の汎関数 $\left(J^{(0)}(\Omega, u), \boldsymbol{J}(\Omega, u)\right)$ は $\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star \in \mathcal{U}$ の近傍において，定理 3.1 を満たす形状勾配 $\left(G^{(0)}, \boldsymbol{G}\right)$ をもつとする．Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda^{(l)}\right)_l \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda})$ とする．$\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star \in \mathcal{U}$ においてアクティブな制約の添え字集合 $I_A\left(\Omega^{\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star}\right) = \left\{ l \in \{1, 2, \cdots, m\} \,\middle|\, J^{(l)}\left(\Omega^{\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star}, u^{\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star}\right) = 0 \right\}$ とする．このとき，$l \in I_A\left(\Omega^{\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star}\right)$ に対する $G^{(l)}$ は 1 次独立とする．$\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star \in \mathcal{U}$ が 問題 $\mathbf{SQP}(\Omega)$ の極小点のとき，次の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon} a(\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star, \boldsymbol{v}) + \left\langle G^{(0)}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v} \right\rangle + \boldsymbol{\lambda}^\star \cdot \langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in X \\
&\boldsymbol{J}(\Omega, u) + \langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}^\star \rangle \le \mathbf{0} \\
&\boldsymbol{\Lambda}^\star \left(\boldsymbol{J}(\Omega, u) + \langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}^\star \rangle\right) = \mathbf{0} \\
&\boldsymbol{\lambda}^\star \ge \mathbf{0}
\end{aligned}$$

定理 3.3 より，$J^{(l)}(u)$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ を最小化する方向 $\boldsymbol{\rho}^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ が求められているとする．このとき，定理 3.4 の第 1 式は自動的に満たされ，次の結果を得る．

**系 3.1 (KKT 条件)** 定理 3.4 の条件に加えて，定理 3.3 の $J^{(l)}(u)$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ ごとに，それらを最小化する方向 $\boldsymbol{\rho}^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ を既知とする．$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\rho}_1^{(l)}$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, m)$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{\rho}_L(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\rho}^{(0)\star} + \sum_{l=1}^{m} \lambda^{(l)} \boldsymbol{\rho}^{(l)\star}$$

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\boldsymbol{\rho}_L(\boldsymbol{\lambda})}{\|\boldsymbol{\rho}_L\|} = \boldsymbol{\rho}_1^{(0)} + \sum_{l=1}^{m} \lambda^{(l)} \boldsymbol{\rho}_1^{(l)}$$

このとき，$\epsilon\boldsymbol{\rho}^\star = \epsilon\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^\star) \in \mathcal{U}$ が 問題 **SQP(Ω)** の極小点のとき，次の条件を満たす.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}(\Omega, u) + \langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^\star)\rangle \leq \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{J}(\Omega, u) + \langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^\star)\rangle) = \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{\lambda}^\star \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

系 3.1 において，第 1 条件式の不等号を等号に置き換えれば，次の連立 1 次方程式となる.

$$
\begin{pmatrix}
\left\langle G^{(1)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}_1^{(1)}\right\rangle & \cdots & \left\langle G^{(1)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}_1^{(m)}\right\rangle \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\left\langle G^{(m)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}_1^{(1)}\right\rangle & \cdots & \left\langle G^{(m)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}_1^{(m)}\right\rangle
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda^{(m)}
\end{pmatrix}
= -
\begin{pmatrix}
J^{(1)}(\Omega, u) + \left\langle G^{(1)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}_1^{(0)}\right\rangle \\
\vdots \\
J^{(m)}(\Omega, u) + \left\langle G^{(m)}\boldsymbol{\nu}, \epsilon\boldsymbol{\rho}_1^{(0)}\right\rangle
\end{pmatrix}
\tag{3.2}
$$

$G^{(l)}\ (l = 1, 2, \cdots, m)$ が 1 次独立のとき，この式の係数行列は正則となる．したがって，この式の解 $\boldsymbol{\lambda}$ を求めて，アクティブな制約の集合を $I_A\left(\Omega^{\epsilon\rho^\star}\right) = \left\{l \in \{1, 2, \cdots, m\} \,\middle|\, \lambda^{(l)} < 0\right\}$ とするスキームが考えられる．この判定を用いて，アクティブな制約のみを残して式 (3.2) を繰り返し解くことにより，系 3.1 の条件を満たす問題 **SQP(Ω)** の解 $\boldsymbol{\rho}^\star$ が得られる.

### 3.3.2 形状最適化問題の解法

多制約問題 **DV(Ω)** の解 $\boldsymbol{\rho}^\star$ は前節のように求められたとする．ここでは，ステップサイズ $\epsilon > 0$ の決め方を定義して，反復法で問題 **SO** の極小解 $\Omega^\star$ に到達できることの裏付けについて考える.

ステップサイズ $\epsilon > 0$ に対する Wolfe の条件を次のように定義する.

**定義 3.5 (Wolfe の条件)** 問題 **DV(Ω)** に対して，Lagrange 汎関数 $L(\Omega, u, \boldsymbol{\lambda})$ を次式とする.

$$
\begin{aligned}
L\left(\Omega^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}, u^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}, \boldsymbol{\lambda}^\star\right) &= J^{(0)}\left(\Omega^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}, u^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}\right) + \boldsymbol{\lambda}^\star \cdot \boldsymbol{J}\left(\Omega^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}, u^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}\right) \\
&\to L(\Omega, u, \boldsymbol{\lambda}) \quad (\epsilon \to +0)
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{\lambda}^\star$ は系 3.1 を満たすとする．ある $\xi, \mu \in \mathbf{R}\ (0 < \xi < \mu < 1)$ として，$\epsilon > 0$ に対する Wolfe の条件を次式で定義する.

$$
L\left(\Omega^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}, u^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}, \boldsymbol{\lambda}^\star\right) - L(\Omega, u, \boldsymbol{\lambda}) \leq \xi \langle \boldsymbol{G}_L(\Omega), \epsilon\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda})\rangle \tag{3.3}
$$

$$
\mu \langle \boldsymbol{G}_L(\Omega), \epsilon\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda})\rangle \leq \left\langle \boldsymbol{G}_L\left(\Omega^{\epsilon\rho(\lambda^\star)}\right), \epsilon\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^\star)\right\rangle \tag{3.4}
$$

ただし，$\boldsymbol{G}_L(\Omega) = \left(G^{(0)}(\Omega) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{G}(\Omega)\right)\boldsymbol{\nu} \in L^1\left(\Gamma; \mathbf{R}^d\right)$ とする．(3.3) は Armijo の条件ともよばれる.

初期値 $\Omega^0$ が極小解 $\Omega^\star$ から遠く離れている場合にも収束するとき，大域的収束性があるという．大域的収束性について次の結果を得る [9].

**定理 3.5 (大域的収束定理)** 問題 **SO** の汎関数 $\left(J^{(0)}(\Omega,u), \boldsymbol{J}(\Omega,u)\right)$ は下界をもち，ある $\Omega^0 \in \mathcal{W}$ に対する水準集合 $\mathcal{W}_L = \left\{\Omega \in \mathcal{W} \mid J^{(0)}(\Omega,u) \le J^{(0)}\left(\Omega^0,u^0\right),\ \boldsymbol{J}(\Omega,u) \le \boldsymbol{0}\right\}$ の近傍 $\mathcal{W}_U$ で，定理 3.1 を満たす形状勾配 $\left(G^{(0)}, \boldsymbol{G}\right)$ は次式を満たすとする．

$$\exists\alpha > 0 : \ \left\|G_L(\Omega) - G_L(\Omega')\right\| \le \alpha \left\|\chi_{\Omega\setminus\Omega'} + \chi_{\Omega'\setminus\Omega}\right\| \quad \forall\Omega, \Omega' \in \mathcal{W}_U$$

ただし，$\boldsymbol{G}_L(\Omega)$ は定義 3.5 と同じ定義，$\chi$ は (3.1) とする．探索方向 $\boldsymbol{\rho}^k$ が系 3.1 の $\boldsymbol{\rho}^\star$ であり，ステップサイズ $\epsilon > 0$ が Wolfe の条件を満たすならば，反復公式で生成される領域列 $\left\{\Omega^k\right\}_k$ に対して次式が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\boldsymbol{G}_L\left(\Omega^k\right)\right\|^2 \cos^2\theta^k < \infty$$

$$\cos\theta^k = -\frac{\left\langle \boldsymbol{G}_L\left(\Omega^k\right), \epsilon\boldsymbol{\rho}^k \right\rangle}{\left\|\boldsymbol{G}_L(\Omega^k)\right\| \left\|\epsilon\boldsymbol{\rho}^k\right\|}$$

### 3.3.3 アルゴリズム

以上の結果を踏まえて，形状最適化問題 **SO** を解くアルゴリズムの一例を次に示す．

**アルゴリズム**

(1) $k = 0$ とする．$\Omega^0 \in \mathcal{W}, \epsilon > 0$ を定める．

(2) $\left(J^{(0)}\left(\Omega^k,u^k\right), \boldsymbol{J}\left(\Omega^k,u^k\right)\right)$ を計算し，収束判定する．
- 収束条件を満たしたとき，計算を終了する．
- 収束条件を満たさないとき，$\left(G^{(0)}\left(\Omega^k\right), \boldsymbol{G}\left(\Omega^k\right)\right)$ を定理 3.1 により計算する．

(3) ある強圧的な双 1 次形 $a(\cdot,\cdot)$ を定めて，$H^1$ 勾配法の問題 $\mathbf{HG}^{(l)}\left(\Omega^k\right)$ の解 $\rho_G^{(l)}$ $(l = 0,1,2,\cdots,m)$ を Galerkin 法で計算し，$\rho_G^{(l)} = \rho^{(l)\star}$ とおく．

(4) 式 (3.2) で $\boldsymbol{\lambda}$ を計算する．
- 系 3.1 の条件式を満たすとき，$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\star$ とおいて，次に進む．
- 系 3.1 の条件式を満たさないとき，それらの条件が満たされるまで，アクティブな制約を残して，式 (3.2) を解き直す．

(5) 系 3.1 の $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda}^\star)$ を用いて，定義 3.5 の Wolfe の条件をチェックする．
- 両条件を満たしていれば，定義 3.3 の領域変動を行い，次に進む．
- (3.4) が成立しなければ，$\epsilon$ を $\epsilon/2$ に置き換え，(3.4) が成立しなければ (3.4) を満たす範囲で $\epsilon$ を更新して，(4) に戻る．

(6) $k + 1$ を $k$ と置き換えて，(2) に戻る．

# 4 SIMP 位相最適化問題

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域において密度を定義して，冒頭で説明したSIMP型の位相最適化問題を考えよう．

密度の許容集合を次のように定義する．

**定義 4.1 (密度の許容集合)** 領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$ は区分的に滑らかで Lipschitz 連続な境界を持つ開領域とする．ある $\Omega$ に対して密度 $\phi$ の集合 $\mathcal{W}$ を次のように定義する[*1]．

$$\mathcal{W} = \left\{ \phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \middle| \ \phi_0 \le \phi \le 1 \right\}$$

ただし，$\phi_0 > 0$ は小さな定数とする．べき指数 $p > 1$ も定数とする．

$p > 1$ の条件は，後で示す問題 $\mathbf{DV}(\phi)$ において $\phi$ の $\phi_0$ と 1 への分極化を促すと考えられる．

密度の重みを付けた SIMP 境界値問題を次のように定義する．

**問題 4.1 (SIMP 境界値問題 BV ($\phi$))** $f \in L^2(\Omega; \mathbf{R})$ を既知として，次式を満たす $u : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を求めよ．

$$-\nabla \cdot (\phi^p \nabla u) = \phi f \quad \text{in } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

評価汎関数を次のように定義する．

**定義 4.2 (評価汎関数)** 定義 4.1 の $\mathcal{W}$ とする．$\phi \in \mathcal{W}$ で定義された問題 $\mathbf{BV}(\phi)$ の解を $u$ とする．$\phi$ と $u$ の関数 $g^{(l)} \in W^{2,\infty}\left(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}\right)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, m)$ とする．目的汎関数 $J^{(0)}(\phi, u)$，制約汎関数 $\boldsymbol{J}(\phi, u) = \left\{ J^{(l)}(\phi, u) \right\}_l \in \mathbf{R}^m$ を合わせて $\left( J^{(0)}(\phi, u), \boldsymbol{J}(\phi, u) \right) \in \mathbf{R}^{m+1}$ を評価汎関数とよび，次のように定義する．

$$J^{(l)}(\phi, u) = \int_\Omega g^{(l)}(\phi, u)\, \mathrm{d}x$$

SIMP 境界値問題の密度を設計変数にした次の問題を SIMP 位相最適化問題とよぶ．

**問題 4.2 (SIMP 位相最適化問題 TO)** 定義 4.1, 4.2 の $\mathcal{W}$, $\left( J^{(0)}(\phi, u), \boldsymbol{J}(\phi, u) \right)$ とする．ある $\phi \in \mathcal{W}$ のときの問題 $\mathbf{BV}(\phi)$ の解を $u$ とする．このとき，次のような $\phi^\star \in \mathcal{W}$ を求めよ．

$$J^{(0)}(\phi^\star, u^\star) = \min_{\phi \in \mathcal{W}} \left\{ J^{(0)}(\phi, u) \middle| \ \boldsymbol{J}(\phi, u) \le \mathbf{0} \right\}$$

密度の許容集合 $\mathcal{W}$ は点列コンパクトである．この問題においても，次のようなスキームで密度列 $\left\{ \phi^k \right\}_k$ を構成していけば，局所解に到達できる．

ある $\phi^k \in \mathcal{W}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ からの密度変動を次のように定義する．

---

[*1] 前章で用いた記号を別の意味で用いる

**定義 4.3 (密度変動)** 定義 4.1 の $\mathcal{W}$ とする．密度変動 $\rho:\ \Omega \to \mathbf{R}$ の集合 $\mathcal{U}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{U} = W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R})$$

ある $\phi^k \in \mathcal{W}$ に対して，新密度 $\phi^{k+1}$ は $\rho \in \mathcal{U}$ と小さな $\epsilon > 0$ を用いて次式で構成する．

$$\phi^{\epsilon\rho} = \phi^k + \epsilon\rho$$
$$\phi^{k+1} = P_{\mathcal{W}}(\phi^{\epsilon\rho})$$

ただし，$P_{\mathcal{W}}$ は凸有界閉集合 $\mathcal{W}$ への直交射影作用素である．

ある $\phi \in \mathcal{W}$ からの最適な密度変動を求める問題を次のように定義する．

**問題 4.3 (最適密度変動問題 DV($\phi$))** 定義 4.1, 4.2, 4.3 の $\mathcal{W}$, $\left(J^{(0)}(\phi, u), \boldsymbol{J}(\phi, u)\right)$, $\mathcal{U}$ とする．ある $\phi \in \mathcal{W}$ と十分小さな $\epsilon > 0$ を既知とする．$\rho \in \mathcal{U}$ に対する問題 **BV**($\phi^{\epsilon\rho}$) の解を $u^{\epsilon\rho}$ とする．このとき，次のような $\rho^\star \in \mathcal{U}$ を求めよ．

$$J^{(0)}\left(\phi^{\epsilon\rho^\star}, u^{\epsilon\rho^\star}\right) = \min_{\rho \in \mathcal{U},\ \|\rho\|=1} \left\{ J^{(0)}(\phi^{\epsilon\rho}, u^{\epsilon\rho}) \middle| \ \boldsymbol{J}(\phi^{\epsilon\rho}, u^{\epsilon\rho}) \le \mathbf{0} \right\}$$

問題 **DV**($\phi$) の解 $\rho^\star \in \mathcal{U}$ と適切な $\epsilon > 0$ を用いて，定義 4.3 により，$\phi^{k+1}$ を求める．
以下に，問題 **DV**($\phi$) の解法と，その解を用いた問題 **TO** の解法を示す．

## 4.1 $J^{(l)}$ の密度勾配

問題 **DV**($\phi$) における $J^{(l)}(\phi, u)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, m)$ の密度変動に対する勾配を密度勾配とよぶ．ここでは，$J^{(l)}(\phi, u)$ ごとの密度勾配の具体的な計算式を示す．
境界値問題の解 $u$ の密度微分を次のように定義する．

**定義 4.4 ($u$ の密度微分 $u'$)** 定義 4.3 を満たすある密度変動 $\epsilon\rho$ とする．問題 **BV** ($\phi$), **BV** ($\phi^{\epsilon\rho}$) の解を $u, u^{\epsilon\rho}$ とする．すべての $\rho \in \mathcal{U}$ に対して次式で定義する $u$ の Gâteaux 微分 $u'$ を密度微分とよぶ．

$$u' = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{u^{\epsilon\rho} - u}{\epsilon}$$

$u'$ について，次の結果を得る．

**補題 4.1 ($u$ の密度微分 $u'$)** 定義 4.1, 4.3 の $\mathcal{W}, \mathcal{U}$ とする．ある $\phi \in \mathcal{W}$ のときの問題 **BV** ($\phi$) の解を $u$ とする．このとき，すべての $\rho \in \mathcal{U}$ に対する $u$ の Gâteaux 微分 $u'$ は，次の問題の一意解である．

$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(p\phi^{p-1}\rho \boldsymbol{\nabla} u\right) - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\phi^p \boldsymbol{\nabla} u') = \rho f \quad \text{in}\ \Omega$$
$$u' = 0 \quad \text{in}\ \Gamma$$

補題 4.1 の境界値問題より，$u'$ は $\rho$ に対する連続線形汎関数であることが確認できる．
定理 4.1 のために，$J^{(l)}(\phi,u)$ に対する随伴問題を次のように定義する．

**問題 4.4 (随伴問題 $\mathbf{AD}^{(l)}(\phi)$)** 定義 4.2 の $\left(J^{(0)}(\phi,u), \boldsymbol{J}(\phi,u)\right)$ とする．$\partial g^{(l)}/\partial u = g_u^{(l)}$ を既知とする．このとき，次式を満たす $v^{(l)}: \Omega \mapsto \mathbf{R}$ を求めよ．

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\phi^p \boldsymbol{\nabla} v^{(l)}\right) = g_u^{(l)} \quad \text{in } \Omega$$
$$v^{(l)} = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

問題 $\mathbf{AD}^{(l)}(\phi)$ の解 $v^{(l)}$ は一意に存在する．
ある $\rho \in \mathcal{U}$ に対する $J^{(l)}(\phi,u)$ $(l = 0,1,2,\cdots,m)$ の Fréchet 微分 $J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho)$ を密度微分とよぶ．また，$J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho) = \left\langle G^{(l)},\rho\right\rangle$ とおいて，$G^{(l)} \in \mathcal{U}^*$ を密度勾配とよぶ．$J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho)$ と $G^{(l)}$ について次の結果を得る．

**定理 4.1 ($J^{(l)}$ の密度微分)** 問題 $\mathbf{DV}(\phi)$ の定義を用いる．$\partial g^{(l)}/\partial \phi = g_\phi^{(l)}$ とする．ある $\phi \in \mathcal{W}$ のときの問題 $\mathbf{BV}(\phi)$ と $\mathbf{AD}^{(l)}(\phi)$ の解を $u, v^{(l)}$ とする．$\rho \in \mathcal{U}$ に対する $J^{(l)}(\phi,u)$ の密度微分 $J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho)$ について次式が成り立つ．

$$J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho) = \int_\Omega G^{(l)}\left(\phi,u,v^{(l)}\right)\rho\,\mathrm{d}x = \left\langle G^{(l)}\left(\phi,u,v^{(l)}\right),\rho\right\rangle$$
$$G^{(l)}\left(\phi,u,v^{(l)}\right) = g_\phi^{(l)} - p\phi^{p-1}\left(\boldsymbol{\nabla} v^{(l)}\cdot\boldsymbol{\nabla} u\right) + f v^{(l)}$$

また，$f \in L^2(\Omega;\mathbf{R}), g^{(l)} \in W^{2,\infty}\left(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}\right)$ と密度勾配 $G^{(l)}\left(\phi,u,v^{(l)}\right) \in W^{1,1}(\Omega;\mathbf{R})$ が成り立つ．

**証明** 次式が成り立つ．

$$J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho) = \int_\Omega \left(g_\phi^{(l)}\rho + g_u^{(l)}u'\right)\mathrm{d}x = \left\langle g_\phi^{(l)},\rho\right\rangle + \left\langle g_u^{(l)},u'\right\rangle$$

補題 4.1 と問題 $\mathbf{AD}^{(l)}(\phi)$ の $\left(u',v^{(l)}\right) \in V^2$ は次の弱形式を満たす．

$$a\left(p\phi^{p-1}\rho,u,v^{(l)}\right) + a\left(\phi^p,u',v^{(l)}\right) = \left\langle \rho f, v^{(l)}\right\rangle \quad \forall v^{(l)} \in V$$
$$a\left(\phi^p,u',v^{(l)}\right) = \left\langle g_u^{(l)},u'\right\rangle \quad \forall u' \in V$$

ただし，次の定義を用いた．

$$a(\phi,u,v) = \int_\Omega \phi \boldsymbol{\nabla} u\cdot\boldsymbol{\nabla} v\,\mathrm{d}x$$
$$V = H_0^1(\Omega;\mathbf{R})$$

2 つの弱形式より，次式が成り立つ．

$$J^{(l)\prime}(\phi,u)(\rho) = \left\langle g_\phi^{(l)},\rho\right\rangle - a\left(p\phi^{p-1}\rho,u,v^{(l)}\right) + \left\langle \rho f, v^{(l)}\right\rangle$$

また，$f \in L^2(\Omega;\mathbf{R}),\ g^{(l)} \in W^{2,\infty}\left(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}\right)$ より，$u, v^{(l)} \in H^2(\Omega;\mathbf{R})$ を得る．この結果から，$G^{(l)}\left(\phi,u,v^{(l)}\right) \in W^{1,1}(\Omega;\mathbf{R})$ を得る．□

**注意 4.1 ($J^{(l)}(\phi, u)$ の形状微分)** $G^{(l)} \notin W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R})$ より，$G^{(l)}$ を $\rho$ とすることはできない．適切な正則化法を考える必要がある．

$G^{(l)}\left(\phi, u, v^{(l)}\right) \in W^{1,1}(\Omega; \mathbf{R}) \subset W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R})^*$ より，$J^{(l)}$ は $\mathcal{U}$ 上で連続である．したがって，定理 2.1 により，次の結果を得る．

**定理 4.2 (問題 DV($\phi$) の解の存在)** 問題 $\mathbf{DV}(\phi)$ の解 $\rho^\star$ は存在する．

## 4.2 $H^1$ 勾配法

密度勾配 $G^{(l)}$ が求められたとする．$G^{(l)}$ を用いて $J^{(l)}$ を最小化する方向 $\rho^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ を求めることを考える．

抽象的勾配法の問題 2.3 において，$V = \mathcal{U}, X = H^1(\Omega; \mathbf{R})$ を選ぶ．このとき，次の問題が定義できる．

**問題 4.5 ($H^1$ 勾配問題 $\mathbf{HG}^{(l)}(\phi)$)** 定理 4.1 の $G^{(l)}$ を既知として，次式を満たす $\rho_G^{(l)} \in X = H^1(\Omega; \mathbf{R})$ を求めよ．

$$a\left(\rho_G^{(l)}, v\right) = -\left\langle G^{(l)}, v\right\rangle \quad \forall v \in X$$

ただし，$a(\cdot, \cdot)$ は $X$ 上の強圧的な双 1 次形式で，例えば，$c_1$ は正定数として，次式で定義する．

$$a(y, z) = (y, z)_X = \int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla z + c_1 yz)\,\mathrm{d}x$$

この問題の解 $\rho_G^{(l)}$ を $J^{(l)}$ が最小化する方向 $\rho^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ の候補とする方法を SIMP 問題に対する $H^1$ 勾配法とよぶ．この $H^1$ 勾配法について，次の定理を得る [6]．

**定理 4.3 (DV に対する $H^1$ 勾配法)** 問題 $\mathbf{DV}(\phi)$ の定義を用いる．ある $\phi \in \mathcal{W}$ に対して定理 4.1 の $G^{(l)}$ は $X^*$ に属し，問題 $\mathbf{HG}^{(l)}(\phi)$ の解 $\rho_G^{(l)} \in X$ は一意に存在する．さらに，

(1) $\rho_G^{(l)} \in \mathcal{U}$ のとき，$\rho_G^{(l)}$ は $J^{(l)}(\phi, u)$ を最小化する方向 $\rho^{(l)\star} \in \mathcal{U}$ である．

(2) $\rho_G^{(l)} \notin \mathcal{U}$ のとき，$n \to \infty$ に対して $\rho_n^{(l)\star} \to \rho_G^{(l)} \in X$ となる $J^{(l)}(\phi, u)$ を最小化する方向の列 $\left\{\rho_n^{(l)\star}\right\}_n \in \mathcal{U}$ が存在する．

**注意 4.2 ($H^1$ 勾配法)** $\mathcal{U}$ に属する有限個の関数を基底関数に用いた有限次元空間 $\mathcal{U}_h$ を用いて，問題 $\mathbf{HG}^{(l)}(\phi)$ を Galerkin 法で解く場合は，近似解 $\rho_{Gh}^{(l)\star} \in \mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ となる．

数値解法に関しては，形状最適化問題の場合と同様のスキームが考えられる．ここでは，省略する．

# 5 まとめ

本稿では，著者らが力法とよんできた方法や SIMP 型位相最適化問題の $H^1$ 勾配法とよんできた方法を，著者の理解に基づいて，数理的側面から議論した．著者の不勉強により，誤った説明がなされている個所や，未解決の部分が顕在しているような気がしている．今後も次の執筆の機会に向けて改定を重ねていく予定である．ご指摘をいただければ存外の幸せである．

# 謝辞

本研究は海津聰先生の協力を得て行われた．著者の不勉強に寛大に対応いただいたことに感謝する．

# 付録

# A 弱点列コンパクト

2 章では，次の定義と定理を用いた．

**定義 A.1 (弱点列コンパクト)** ノルム空間 $V$ とする．空でない部分集合 $S \subset V$ の中のすべての点列が $S$ の点に弱収束する部分列をもつとき，$S$ は弱点列コンパクトという．

弱点列コンパクトについて James の定理が知られている [10].

**定理 A.1 (弱点列コンパクト)** 実 Banach 空間 $V$，空でない凸有界閉部分集合 $S \subset V$ とする．すべての連続線形汎関数が $S$ 上で上界をもつとき，$S$ は弱点列コンパクトである．

**定義 A.2 (下半連続)** 実 Banach 空間 $V$，空でない部分集合 $S \subset V$，汎関数 $J : S \to \mathbf{R}$ とする．ある $x^0 \in S$ に弱収束する $S$ の中のすべての点列 $\{x^n\}_n$ に対して次式を満たすとき，$J$ を下半連続という．

$$\liminf_{n\to\infty} J(x^n) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} J(x^m)\right) \geq J\left(x^0\right)$$

# B 汎関数の形状微分

3 章と付録 C では次の古典的な結果を用いた．

**補題 B.1 (領域積分の形状微分)** 定義 3.1, 3.3 の $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ とする．$\Omega \in \mathcal{W}$ の境界は $W^{1,\infty}$ 級とする．すべての領域変動 $\rho \in \mathcal{U}$ に対する関数 $u \in W^{1,1}\left(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}\right)$ の Gâteaux 微分 $u' =$

$\lim_{\epsilon\to+0}\left(u^{\epsilon\rho}-u\right)/\epsilon\in W^{1,1}\left(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}\right)$ とする．このとき，領域積分 $J(\Omega)$ の Fréchet 微分 $J'(\Omega)(\rho)$ について次の関係が成り立つ．

$$J(\Omega)=\int_\Omega u\,\mathrm{d}x$$
$$J'(\Omega)(\rho)=\int_\Omega u'\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma u\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}x$$

**補題 B.2 (境界積分の形状微分)** 定義 3.1, 3.3 の $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ とする．$\Omega\in\mathcal{W}$ の境界は $W^{2,\infty}$ 級とする．すべての領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する関数 $u\in W^{2,1}\left(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}\right)$ の Gâteaux 微分 $u'=\lim_{\epsilon\to+0}\left(u^{\epsilon\rho}-u\right)/\epsilon\in W^{2,1}\left(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}\right)$ とする．このとき，領域積分 $J(\Omega)$ の Fréchet 微分 $J'(\Omega)(\rho)$ について次の関係が成り立つ．

$$J(\Omega)=\int_\Gamma u\,\mathrm{d}\Gamma$$
$$J'(\Omega)(\rho)=\int_\Gamma u'\,\mathrm{d}\Gamma+\int_\Gamma(\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nu}+\kappa\phi)\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}\Gamma$$

ただし，$\kappa=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nu}$, $\kappa/(d-1)$ は平均曲率とよばれる．

$J'(\Omega)(\rho)$ を $J(\Omega)$ の形状微分とよぶ．

# C　定理 3.1 の証明 (別法)

3.1 の証明の前半において，補題 3.1 の境界条件を陽に用いない方法を示す [11].

**定理 3.1 の証明 (別法)** 問題 $\mathrm{BV}(\Omega)$ の弱形式を制約とする $J^{(l)}(\Omega,u)$ の Lagrange 汎関数 $L^{(l)}\left(\Omega,u,v^{(l)}\right)$ を考える．ただし，$\left(u,v^{(l)}\right)\in\left(H^1(\Omega;\mathbf{R})\right)^2$ とする．

$$L^{(l)}(\Omega,u,v)=J^{(l)}(\Omega,u)-\int_\Omega\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega fv^{(l)}\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma v^{(l)}\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_\Gamma u\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma$$

領域変動 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}$ に対する $L^{(l)}\left(\Omega,u,v^{(l)}\right)$ の Gâteaux 微分 $L^{(l)\prime}\left(\Omega,u,v^{(l)}\right)(\rho)$ は次式となる．

$$\begin{aligned}L^{(l)\prime}\left(\Omega,u,v^{(l)}\right)(\rho)&=\int_\Omega g_u^{(l)}u'\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\boldsymbol{\nabla}u'\cdot\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v^{(l)\prime}\,\mathrm{d}x\\&\quad+\int_\Omega fv^{(l)\prime}\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma v^{(l)\prime}\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_\Gamma u'\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma\\&\quad+\int_\Gamma\left\{g^{(l)}-\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}+2\left(\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)(\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nu})\right\}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}\Gamma\\&=\int_\Gamma\left\{g^{(l)}+(\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nu})\left(\boldsymbol{\nabla}v^{(l)}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right\}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}$$

第 1 等号において，付録の補題 B.1, B.2 と $u=v^{(l)}=0$ on $\Gamma$ を用いた．第 2 等号において，問題 $\mathrm{BV}(\Omega)$ と問題 $\mathrm{AD}^{(l)}(\Omega)$ の弱形式と $\partial u/\partial\tau^\alpha=\partial v^{(l)}/\partial\tau^\alpha=0$ $(\alpha=1,2,\cdots,d-1)$ を用いた．$\boldsymbol{\tau}^\alpha\in\mathbf{R}^d$ は $\Gamma$ 上の単位接線である．$L^{(l)\prime}\left(\Omega,u,v^{(l)}\right)(\rho)=J^{(l)\prime}(\Omega,u)(\rho)$ より，定理の等式を得る．□

# 参考文献


[1] 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479–1486, 1994.

[2] 海津聰, 畔上秀幸. 最適形状問題と力法について. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 2006.

[3] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization : theory, methods and applications*. Springer, Berlin ; Tokyo, 2003.

[4] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. *Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation*. SIAM, 2003.

[5] H. Azegami and S. Kaizu. Smoothing gradient method for non-parametric shape and topology optimization problems. In *Proceedings of the 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-7)(CD-ROM)*, pp. 1–10, 2007.

[6] 畔上秀幸, 海津聰. 連続体の位相最適化問題について. 日本応用数理学会 2007 年度年会講演予稿集, pp. 210–211, 2007.

[7] J. Jahn. *Introduction to the theory of nonlinear optimization, Second revised edition*. Springer-Verlag, 1996.

[8] D. Chenais. On the existence of a solution in a domain identification problem. *J. of mathematical analysis and applications*, Vol. 52, pp. 189–219, 1975.

[9] 藤田宏, 今野浩, 田邊國士. 最適化法. 岩波書店.

[10] R. B. Holmes. *Geometric functional analysis and its applications*. Springer-Verlag, 1975.

[11] G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 363–393, 2004.